Rq : [la Séance de 07/04/2020]

# 2 Série de fonctions

**Définition 4**

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions définie sur un intervale $I$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $(\mathbb{C})$ :
$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcccl} f_n & : & I & \to & \mathbb{R} \quad (ou \mathbb{C} \\ & & x & \mapsto & f_n(x) \end{array}$$

Pour tout entier $\mathbb{N}$, on définit la suite des sommes partielles associe à $(S_n(x))_n$ par

$$\forall x \in I : \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x)$$

On appelle série de fonction le couple $(f_n(x), S_n(x))$ On note en générale la série de fonction par

$$\sum_n f_n(x)$$

$f_n(x)$ est appellé le terme génél de la série de fonction.

## 2.1 Convergences

Soit $\sum_{n\geq 0}(f_n : x \to f_n(x))$ une série de fonction

### 1. Convergence simple

**Définition 4**

On dit que la série de fonction $\sum_n f_n(x)$ **converge Simplement** sur $I$ i.e il existe une fonction $S$ telle que

$$\forall x \in I, \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x)$$

$S(x) = \sum_n^{+\infty} f_n(x)$ est appellée la somme de la série $\sum_n f_n(x)$ ceci se traduit par :

$$\forall x \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon)$$

**Définition 4**

**(Somme et restes d'une série de fonctions convergente)**

Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions convergente.

— - La limite $S$ de la suite $(S_n)$ est appelée somme de cette série, et notée $S = \sum_n^{+\infty} f_n$
Elle est donc définie par $\forall x \in I, \quad S(x) = \sum_n^{+\infty} f_n(x)$

— - Pour tout $N$ de $\mathbb{N}$, on appelle reste d'ordre $N$ de la série $\sum_n^{+\infty} f_n$ la fonction $R_N$ définie par : $\forall x \in I$,‘ $\quad R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)$

**Remarque 3.6**

— -Avec les notations précédentes, on a $\forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I: \quad S(x) = S_n(x) + R_N(x)$

— - Par définition, la suite $(R_N)$ converge simplement sur $I$ vers la fonction nulle.

## 2. Convergence uniforme

**Définition 4**

On dit que la série de fonctions $\sum_n^{+\infty} f_n(x)$ est uniformément convergente sur $I$ si la suite $(S_n(x))_n$ des sommes partielles est uniformément convergente sur $I$. Si on pose $S(x)$ la limite uniforme de $(S_n(x))_n$ la définition se traduit par :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup |S_n(x) - S(x)| = 0$$

ceci se traduit par :

$$\forall x \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow \sup |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon)$$

**Remarque 3.7**

La convergence uniforme d'une série de fonction inplique la CV Simple de cette série de fonctions

**Exemple 3.5**

Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+|x|)^n}$$

Etudie la convergence sinple et uniforme de la série $\sum_n f_n(x)$

**Solution**

-**Convergence Simple** Soit $x \in \mathbb{R}$ On a :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{(1+|x|)^k} = x\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{1+|x|})^k$$

On sait que :

$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$ alors

$$\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{1+|x|})^k = \frac{1-(\frac{1}{1+|x|})^{n+1}}{1-\frac{1}{1+|x|}} \qquad \text{si} \quad x \neq 0$$

Donc si $x \neq 0$

$$S_n(x) = x\frac{1-(\frac{1}{1+|x|})^{n+1}}{1-\frac{1}{1+|x|}}$$

et

$$S_n(0) = 0$$

Par conséquant, Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé alors
*Si $x = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} S_n(0) = 0$

** Si $x \neq 0$
On a

$$0 < \frac{1}{1+|x|} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{1+|x|})^{n+1} = 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{x(1+|x|)}{|x|}$$

Alors la suite de fonction $(S_n)_n$ CV Simplement vers la fonction $S$ définie par :

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x(1+|x|)}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

D'où la série $\sum_n f_n(x)$ Convege Simplement vers la fonction $S$

-**Convergence Uniforme** :
On remarque que la fonction $S$ n'est pas continue en 0 car

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} S(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x(1+x)}{x} = 1$$

et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} S(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x(1-x)}{-x} = -1$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} S(x) \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} S(x)$$

$\Rightarrow$ la fonctin $S$ n'est pas continue en 0
On a de plus la suite de fonction $(S_n)_n$ est continue si $(S_n)_n$ CV Uniformement vers $S$.
Alors $S$ est continue ce qui n'est pas le cas, donc la converge de $(S_n)_n$ vres $S$ n'est pas Uniforme.

**Ou Bien** On colcul

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - S(x)| =?$$

On a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - S(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^*} |S_n(x) - S(x)| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^*} |\frac{x[1-(\frac{1}{1+|x|})^{n+1}]}{1-\frac{1}{1+|x|}} - \frac{x(1+|x|)}{|x|}| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^*} |\frac{x(1+|x|)[1-(\frac{1}{1+|x|})^{n+1}]}{|x|} - \frac{x(1+|x|)}{|x|} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^*} |\frac{x(1+|x|)(\frac{1}{1+|x|})^{n+1}}{|x|} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^*} (\frac{1}{1+|x|})^n
\end{aligned}$$

Soit la fonction $h : x \longmapsto (\frac{1}{1+|x|})^n$ est pair donc il suffit de colculer la borne supérieure sur $[0, +\infty[$
on pose $h(x) = (\frac{1}{1+|x|})^n$ alors $h'(x) = n(\frac{1}{1+x})^{n-1} \times \frac{-1}{(1+x)^2}$

| $X$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $h_n(X)$ | $1 \searrow 0$ |

donc

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} h(x) = 1$$

Finalement

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - S(x)| = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - S(x)| = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow (S_n)_n$ ne converge pas uniformement vers $S$
$\Rightarrow \sum_n f_n(x)$ ne converge pas uniformement vers $S$

### 3. Critere de Cauchy de Convergence Uniforme

**Proposition 3.2**

La série $\sum f_n(x)$ C.V uniformement sur $I$ SSI

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \qquad .(m > n \geq N \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{m} f_n(x)| < \varepsilon$$

**Preuve**

La série $\sum f_n(x)$ C.V uniformement sur $I$ SSI la suite de fonction $(S_n(x))_n$ C.V uniformement
SSI

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \qquad .(m > n \geq N \Rightarrow |S_m - S_n| < \varepsilon$$

On a donc le résultat puisque $S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{m} f_n(x)$ $\qquad \square$

### 4. Convergence absolue

**Définition 5**

On dit que la série $\sum f_n(x)$ Converge absolument sur $I$ Si la série $\sum |f_n(x)|$ Converge Simplement sur $I$
C. à. d si la suite de fonction des sommes partielles

$$(T_n)_n = (\sum_{k=0}^{n} |f_n(x)|$$

Converge Simplement.

**Remarque 3.8**

La convergence absolue d'une série de fonction inplique la CV Simple de cette série de fonctions

## 5. Convergence Normale

**Définition 5**

On dit que la série $\sum f_n(x)$ Converge Normale sur $I$ Si la série numérique de terme général $V_n = \sup_{x\in I}|f_n(x)|$ Converge.

**Définition 5**

Une série de fonctions $\sum f_n(x)$ définie sur $D$ est dite normalement convergente sur $I \subset D$ lorsqu'il existe une série $\sum_n a_n$, à termes réels positifs, telle que :

1. $\forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq a_n$
2. La série $\sum_n a_n$ converge.

**Exemple 3.6**

1- $\sum_n \frac{\sin(nx}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ car

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\frac{\sin(nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$$

2- $\sum \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ car

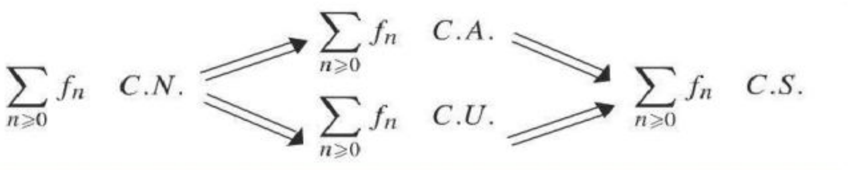
$$0 \leq |\frac{e^{-nx}}{1+n^2}| \leq \frac{1}{1+n^2}$$

**Rq** : Nous allons montrer que la CV Normale Implique toutes les autres Convergences.

**Proposition 3.3**

1. - La convergence normale (C.N) $\Rightarrow$ convergence Uniforme (C.U) $\Rightarrow$ convergence Simple (C.S).
2. - La convergence normale (C.N) $\Rightarrow$ convergence absolue $\Rightarrow$ convergence Simple (C.S).

On a le diagramme suivant




**Preuve**

1- On a

$$|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \sup_{x\in I}|f_k(x)|$$

Puisque $\sum_n f_n(x)$ CV. normalement alors la serie $\sum_n \sup_{x\in I}|f_n(x)|$ CV. elle vérifie donc le critére de Cauchy, donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \qquad (m > n \geq N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} \sup_{x\in I}|f_k(x)| < \varepsilon$$

D'ou

$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \qquad (m > n \geq N \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)| < \varepsilon$

Finalement la série $\sum f_n(x)$ verifie le critere de Cauchy pour la CV Uniforme et par suite elle converge Uniformément. $\square$

2- On a $\forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in I} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \sup_{x\in I} |f_k(x)|$$

On pose que $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \sup_{x\in I} |f_k(x)| < +\infty$ car la série $\sum \sup_{x\in I} |f_k(x)|$ est convergente.
d'où la suite $(T_n(x))_n = (\sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|)_n$ est une suite croissante majorée par $S$ donc C.V $\Rightarrow$ La série $\sum_n f_n(x)$ CV absolument. $\square$

### 6. Critére de Convergence Uniforme d'une série de fonction